岡本-Painleve対の2重被覆について (Painleve系と超幾何系)

齋藤, 政彦; 寺島, ひとみ; 笹野, 祐輔

数理解析研究所講究録 1239 巻 2001 年 122-133

岡本－Painlevé 対の2重被覆について

神戸大理　齋藤　政彦(Masahiko Saito) 神戸大自然
寺島　ひとみ(Hitomi Terajima), 笹野　祐輔(Yusuke Sasano)
Kobe Univ.

0 序

パンルベェ方程式に対して、岡本－Painlevé対が対応する。逆に、岡本－Painlevé対に対して、その変形をこめて考えれば、パンルベェ方程式が対応する。[STT]
津田、坂井、岡本氏達は、Y.Manin[M]にあるLandin変換を、パンルベェ方程式の二次変換の立場からとらえ直し、又一般的に有限次の変換(folding transformation)によって異なるタイプのパンルベェ方程式が移り合う様子を決定した。この変換においては、通常のベックルント変換とは異なり、タイプが変わること、又異なるタイプのパンルベェ方程式のRiccati解と有理解の間に関係がつけられる等の興味深い結果が得られている。この小文では、これらの結果を岡本－Painlevé対の分岐被覆の立場から考察したい。

1 岡本－Painlevé対の2重被覆の分類について

岡本－Painlevé対の復習をしておく。

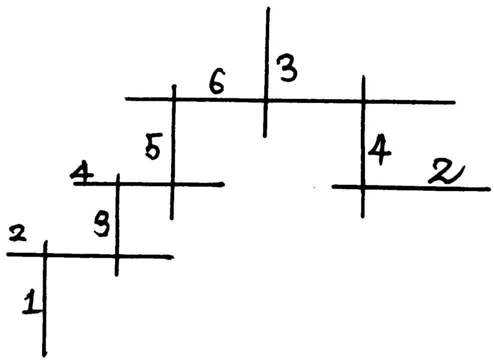
定義1・1　　S を有理曲面、$Y=\sum_{i=1}^{r} a_i Y_i$ を S 上の有効因子であって、反標準因子に線型同値であるものとする。この時、$1\le i\le r$ なるすべての i に対して、$Y\cdot Y_i=\deg Y|_{Y_i}=0$ が成立する時、対 (S, Y) を有理岡本－Painlevé対という。

[STT]

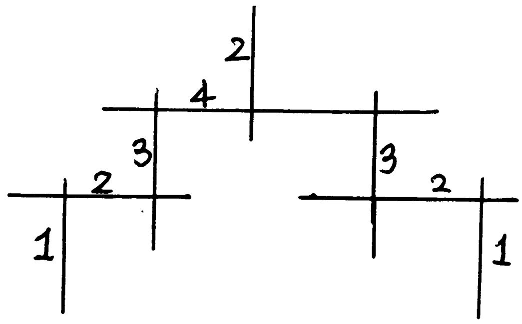
パンルベェ方程式と、それに対応する有理岡本－Painlevé対の関係は、次の様に表わされる。

パンルベェ方程式	P_{I}	P_{II}	$P_{III}(\tilde{D}_8)$	$P_{III}(\tilde{D}_7)$	$P_{III}(\tilde{D}_6)$	P_{IV}	P_{V}	P_{VI}
Y	$\tilde{E}_8$	$\tilde{E}_7$	$\tilde{D}_8$	$\tilde{D}_7$	$\tilde{D}_6$	$\tilde{E}_6$	$\tilde{D}_5$	$\tilde{D}_4$

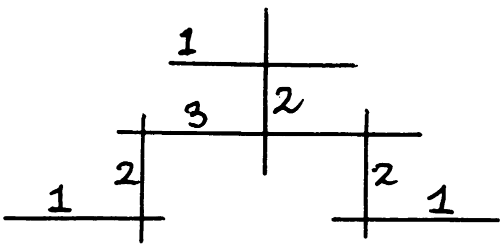
ここで、有効因子 Y は、小平による楕円曲面の極小モデルにあらわれる特異ファイバーと同じコンフィギュレーションをもつ事が分かり、その双対グラフは、アファインディンキン図形になる事が知られている。上の $\tilde{D}_k$ $(4\le k\le 8)$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ はそのアフィンディンキン図形のタイプをあらわす。具体的なコンフィギュレーションは、次の図のようになる。



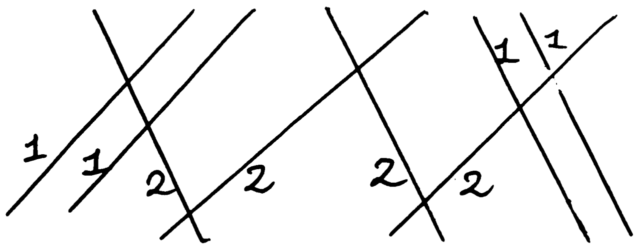
$\tilde{E}_8$



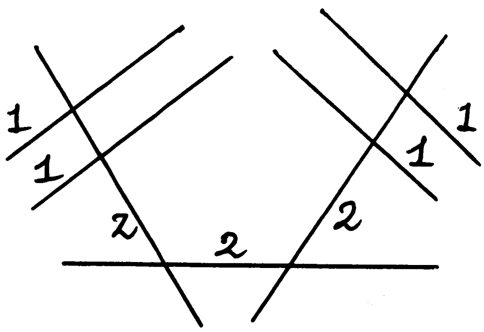
$\tilde{E}_7$



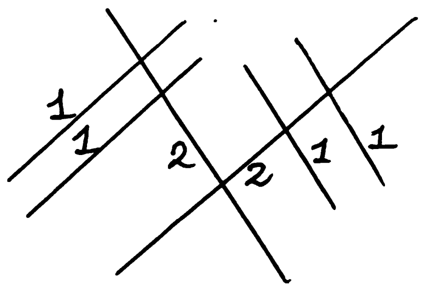
$\tilde{E}_6$



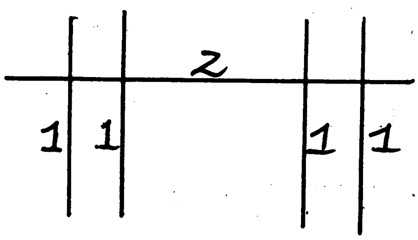
$\tilde{D}_7$



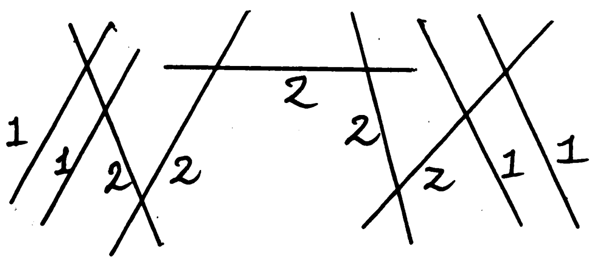
$\tilde{D}_6$



$\tilde{D}_5$



$\tilde{D}_4$



$\tilde{D}_8$

さて、(S, Y) を有理岡本－Painlevé対とする。ここで、次の問題を考えよう。

問題　S の2重被覆 T であって、適当に(H)－曲線をつぶすと、再び有理岡本－Painlevé対になるようなものは、どれくらい存在するだろうか？

$$
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "\text{2重被覆}"'] \arrow[dr, "\text{(H)－曲線をつぶす}"] & \\
S & & S'
\end{tikzcd}
$$

定理1・2　2重被覆を分類することにより、次の定理を得た。[STS]

Y	S	S'
$\tilde{D}_4$	P_{VI}	P_{VI}
$\tilde{D}_5$	P_{V}	$P_{III}(\tilde{D}_6)$
$\tilde{E}_6$	P_{IV}	なし
$\tilde{D}_6$	$P_{III}(\tilde{D}_6)$	P_{V}, $P_{III}(\tilde{D}_8)$
$\tilde{D}_7$	$P_{III}(\tilde{D}_7)$	なし
$\tilde{D}_8$	$P_{III}(\tilde{D}_8)$	$P_{III}(\tilde{D}_6)$
$\tilde{E}_7$	P_{II}	P_{II}
$\tilde{E}_8$	P_{I}	なし

注意：一般的にn重分岐被覆について同様の問題を考える事ができる。$P_{IV}(\widetilde{E}_6)$で$n=3$の場合、$P_{VI}(\widetilde{D}_4)$で$n=2^m$（mは自然数）であるものが、構成できる。（津田、坂井、岡本氏）

2. 2重被覆の構成

複素多様体の分岐2重被覆の構成を思い出しておこう。

Wを複素多様体とし、BをW上の有効因子とする。今、$[B]=2F$なる直線束Fが存在すると仮定し、Fを固定する。

$\pi: F \longrightarrow W$を射影とする．

$W=\bigcup_i U_i$をWの開被覆とする。

$\{\beta_i\}_i$をBの局所方程式とする．

$\{\varphi_{ij}\}$をFの変換関数とする。

これより、$F=\bigcup_i U_i \times \mathbb{C}$なる$F$の全空間の座標開被覆をえる。ここで座標変換は、$(z,\eta_i)\in U_i\times\mathbb{C}$と$(z,\eta_j)\in U_j\times\mathbb{C}$では、$\eta_i=\varphi_{ij}(z)\eta_j$で与えられる。

又、仮定より、$\beta_i=\varphi_{ij}^2(z)\beta_j$である。

Fの部分多様体Tを次の様にして定義する。

$$T\cap(U_i\times\mathbb{C})=\{(z,\eta_i)\mid \eta_i^2-\beta_i=0\}$$

ここで、Tが非特異 $\Leftrightarrow$ Bが非特異に注意する。そうすると、$\eta_i^2-\beta_i=\varphi_{ij}^2(\eta_j^2-\beta_j)$である事が分かる。TをBをbranch locusにもつWの2重被覆という。

定理1・3　　上の状況において、

K_W, K_TをそれぞれW, Tの標準因子とする。この時、K_Tは次の様にあらわされる。

$$K_T=\pi^* K_W+R$$

（ここで、Rは$\pi^*(B)=2R$なる有効因子である。）

定理1・4　　(S, Y)が岡本－Painlevé対であり、Bで分岐した分岐被覆S'が再び岡本－Painlevé対であるとする。この時、Bのbranch locusとして選べる既約因子は、(-2)-曲線のみである。

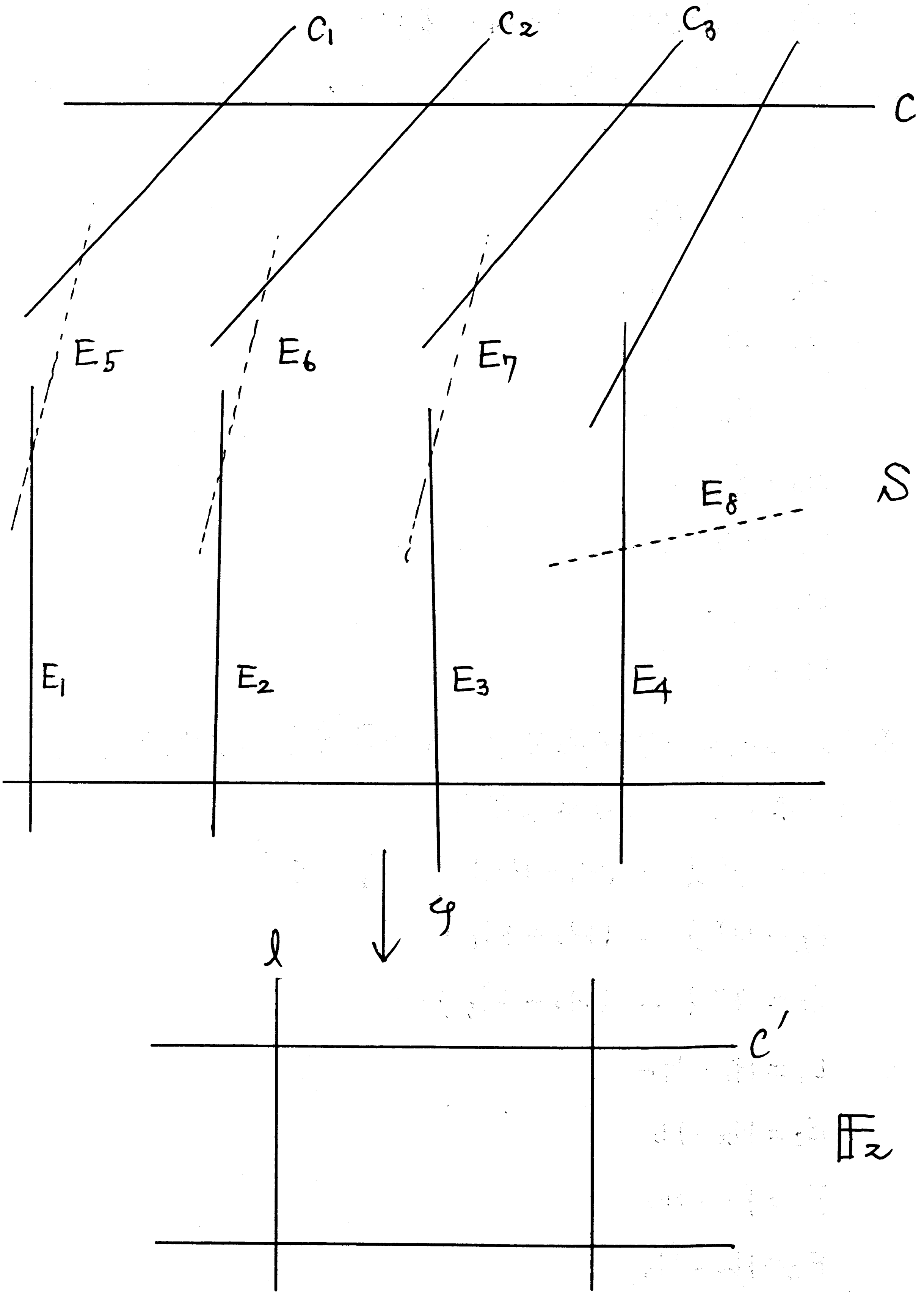
［証明］　EをBの中の既約因子で、(-2)-曲線でないとする。$\pi: X\longrightarrow S$をBをbranch locusにもつSの2重被覆とする。そうすると、$\pi^*E=2E'$となる$E'\in \mathrm{Div}(X)$が存在する。又、$(E')^2=\frac{1}{2}(E)^2\neq -1$である事に注意しておく。定理1・3より、E'は$K_X$の成分である。ここで、E'は$K_X$に正に効く。これより、$-K_X$に負に効く。しかし、$(E')^2\neq -1$より、E'を非特異点にブローダウンする事はできない。

よって $-K_X$ の中に負に効いたままになる。これでは、有理岡本－Painlevé対にはならない。（証明終り）

注意： 岡本－Painlevé対 (S, Y) に対し、$S-Y_{red}$ に含まれる非特異有理曲線 $C \cong \mathbb{P}^1$ は、$(C)^2=-2$ を満たす。この C は対応するパンルベェ方程式の Riccati 解に対応する。（本紙 齋藤，寺島氏）今2重被覆 $\pi: T \longrightarrow S$ をとる時に $C \subset S-Y_{red}$ が分岐因子に含まれれば、その逆像 $C' \subset T$ は、(-1)-曲線になる。この C' を非特異点 P につぶして S' という岡本－Painlevé対がえられるとすると、$P \in S'$ は S' に対応するパンルベェ方程式の代数解に対応する。

3　例

第Ⅵパンルベェ方程式の場合について、考えてみる。岡本氏の構成により、Hirzebruch曲面 Σ_2 のブローアップで、P_{VI} に対応する岡本－Painlevé対を構成することができる。［MMT］ 定理 1.4より、Branch locusの既約因子として選べるものは、(-2)-曲線のみであった。$S-Y$ 内に入る (-2)-曲線の最大の入り方は D_4 型である。（本紙齋藤氏，寺島氏）これに対応するパラメーターの1つとして、$\kappa_0=\kappa_1=\kappa_t=0$, $\kappa_\infty=1$ をとる。


C_1
C_2
C_3
C
E_5
E_6
E_7
E_8
S
E_1
E_2
E_3
E_4
φ
l
C'
$\mathbb{F}_2$

S の Picard 群は、次の様に書ける。

$$\mathrm{Pic}(S) = \mathbb{Z}C' + \mathbb{Z}\varphi^* l + \mathbb{Z}H_1 + \mathbb{Z}H_2 + \cdots + \mathbb{Z}H_7 + \mathbb{Z}H_8$$

ここで

$$H_1 = E_1 + E_5$$
$$H_2 = E_2 + E_6$$
$$H_3 = E_3 + E_7$$
$$H_4 = E_4 + E_8$$
$$H_5 = E_5$$
$$H_6 = E_6$$
$$H_7 = E_7$$
$$H_8 = E_8$$

である。S 内の (-2)-曲線を $\mathrm{Pic}(S)$ の基底 $\{C', \varphi^* l, H_1, \cdots, H_8\}$ を用いて書くと、次の様になる。

$$C_1 = \varphi^* l - (H_1 + H_5) \qquad , \quad C'$$
$$C_2 = \varphi^* l - (H_2 + H_6)$$
$$C_3 = \varphi^* l - (H_3 + H_7)$$
$$E_1 = H_1 - H_5$$
$$E_2 = H_2 - H_6$$
$$E = H_3 - H_7$$
$$E_4 = H_4 - H_8$$
$$C = C' + 2\varphi^* l - (H_1 + H_2 + H_3 + H_4)$$

$B := a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 E_1 + a_5 E_2 + a_6 E_3 + a_7 E_4 + a_8 C + a_9 C'$ とおく。　$(a_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Bを先程のPic(S)の基底$\{C', \varphi^* l, H_1, \cdots\cdots, H_8\}$を用いて書き直す。

そうすると、

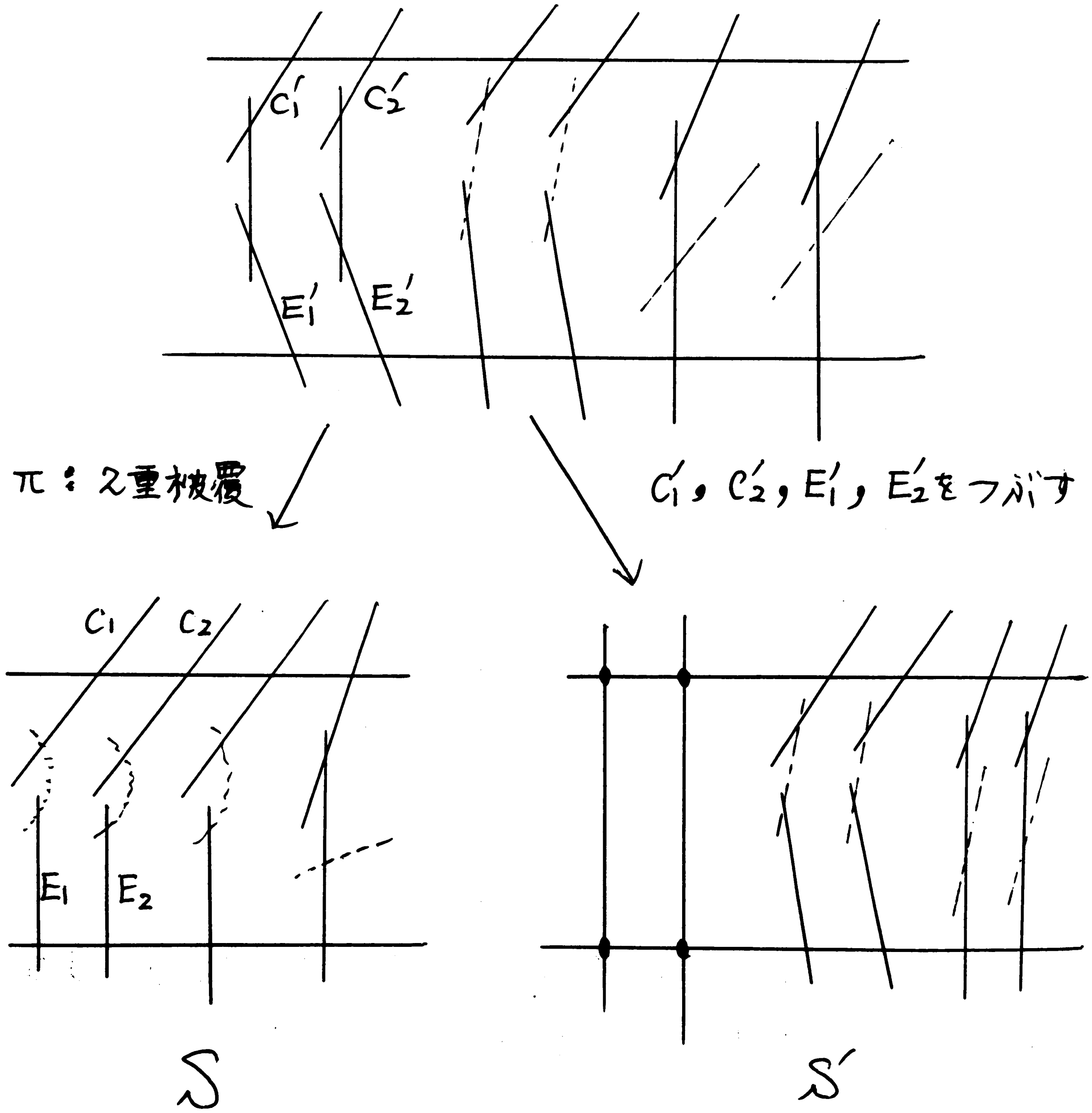
$B = (-a_1 + a_4 - a_8) H_1 + (-a_2 + a_5 - a_8) H_2 + (-a_3 + a_6 - a_8) H_3 + (a_7 - a_8) H_4 + (-a_1 - a_4) H_5 + (-a_2 - a_5) H_6 + (-a_3 - a_6) H_7 - a_7 H_8 + (a_8 + a_9) H_9 + (a_1 + a_2 + a_3 + 2a_8) H_{10}$ となる。

すると次の事がわかる。

$$B \in 2\,\mathrm{Pic}(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_7 = a_8 = a_9 = 0 \\ a_1 \equiv a_4 \pmod 2 \\ a_2 \equiv a_5 \pmod 2 \\ a_3 \equiv a_6 \pmod 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

$a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0$よりどの2つを1にするかを決める、すなわち${}_3C_2 = 3$通りのとり方がある事が分かる。

例　$B := C_1 + C_2 + E_1 + E_2$　とする。



参考文献

[STT] M.-H. Saito, T. Takebe & H. Terajima, Deformation of Okamoto-Painlevé pairs and Painlevé equations, math. AG/0006026 accepted for Journal of Algebraic Geometry

[MMT] T. Matano, A. Matumiya and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, II, J. Math. Soc. Japan, 51, No. 4, 1999, 843-866

[M] Y. Manin, Cubic forms: Algebra, Geometry, Arithmetic. North Holland, Amsterdam (1974).

[STS]：齋藤，寺島，笹野
岡本－Painlevé対の2重被覆について　in preparation